Lokální, globální a vázané extrémy funkcí více proměnných – – několik řešených příkladů

(1.) V R^2 vyšetřete lokální a globální extrémy fce

$$f(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2$$

1) fce nenabývá globálních extrémů, neboť:

pro $x=1$ je $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(1,y) = \lim\limits_{y\to\pm\infty} (11y - y^2) = -\infty$

a pro $x=-1$ je $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(-1,y) = \lim\limits_{y\to\pm\infty} (-13y + y^2) = +\infty$

(při „podezření", že fce nemá glob. extrémy se občas vyplatí toto dokázat pomocí „řezů")

2) lokální extrémy fce v R^2:

f má v R^2 spojité parciální derivace druhého řádu, lze tedy hledat lokální extrémy pouze mezi stacionárními body (tj. $\nabla f = \vec{0}$) pomocí „zkoumání" druhého diferenciálu (vyšetření Hessovy matice druhých derivací)

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12y - 2xy - y^2 = y(12-2x-y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12x - 2xy - x^2 = x(12-2y-x)$

$\nabla f(x,y) = \vec{0}$ pro body $(0,0), (0,12), (12,0), (4,4)$ – – body „podezřelé" z lok. extrému

(ii) Vyšetření lokálních extrémů v „podezřelých" bodech:

Matice druhých derivací

$$D^2f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y, & 12-2x-2y \\ 12-2x-2y, & -2x \end{bmatrix}$$

označme-li $H(x,y)$ determinant matice druhých derivací („Hessián"), pak :

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$$ v $(0,0)$ není lokální extrém (pro $n=2$ platí i s nulami na hlavní diagonále)

stejně $H(0,12)<0$ i $H(12,0)<0 \Rightarrow$ v těchto bodech není lok. extrém

$$H(4,4) = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$$ v $(4,4)$ je ostré lokální maximum (neboť $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,4)<0$)

(Pozn.: pro $n>2$ – pro posouzení definitnosti matice druhých derivací – Sylvestrovo kritérium)

(2.) v R^2 vyšetřete globální a lokální extrémy fce

$$f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^3$$

1) fce nenabývá globálních extrémů v R^2 :

neboť, zvolíme-li $y=x$, pak

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x-1)^3 = \pm\infty$$

2) lokální extrémy :

f má spojité druhé parc. derivace, hledejme tedy

(i) stacionární body :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) + 3(y-1)^2,$$

$$\nabla f(x,y) = \vec{o} \Leftrightarrow (x,y) = (1,1)$$

$$H(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

tedy, odtud není žádná informace o nabývání lokálního extrému.

Vyšetříme „chování" funkce v okolí bodu $(1,1)$:

$f(1,1) = 0$; vezmeme-li $y = x$, pak $f(x,y) = (x-1)^3$

a pro $x > 1$ je $f(x,x) > 0$ a pro $x < 1$ je: $f(x,x) < 0$, tedy, v lib. okolí bodu $(1,1)$ f nabývá hodnot větších i menších než je $f(1,1)$, <u>tedy, f nemá v bodě $(1,1)$ lokální extrém.</u>

(3) V R^2 vyšetřete globální a lokální extrémy fce
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y.$$

1) <u>globální extrémy:</u>

pro $y = 0$: $f(x,0) = x^2 \to +\infty$ pro $x \to \pm\infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f nemá v R^2 globální maximum

„zdá se", že globální minimum fce bude mít
(f je spojitá, pro (x,y) „vzdalující" se od počátku $f(x,y) \to +\infty$)

zde se snadno odhadne: $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1$,
tedy, globální minimum je v bodě $(x_0,y_0) = (0,1)$ a $f(0,1) = -1$

2) <u>lokální extrémy v R^2</u>

opět, mohou nastat jen ve stacionárních bodech, tj. tam, kde $\nabla f = \vec{o}$, tj.
$$2x = 0 \quad \text{a} \quad 2y - 2 = 0,$$
což je pouze v bodě $(0,1)$

(můžete ověřit, že Hessián „funguje")

(pokuste si také zdůvodnit (bez předchozích úvah v 1)), proč je zde globální minimum.)

(4) Vyšetřete globální extrémy fce
$$f(x,y) = x^2+y^2-2y$$
na množině $M = \{[x,y];\ x^2 \le y \le 4\}$. (Snadný příklad)

1) M je omezená a uzavřená množina v R^2, tedy M je kompaktní, f je na M spojitá, tedy f nabývá na M globálního maxima i minima:

uzavřenost M lze ukázat např. takto:

$M_1 = \{[x,y];\ y \le 4\}$ je uzavřená
(vzor při spojitém zobrazení uzavřeného int. $(-\infty, 4\rangle$

$M_2 = \{[x,y];\ 0 \le y-x^2\}$, – opět, vzor při spojitém zobrazení uzavřeného int. $\langle 0,+\infty)$, tedy M_2 – uzavřená

$M = M_1 \cap M_2$, průnik dvou uzavřených množin je uzavřená množina

omezenost je zřejmá

2) globální extrémy budou buď ve vnitřních bodech M, t.j. v $\{[x,y];\ x^2 < y < 4\} = M^\circ$
nebo na hranici, t.j. ve
$$\partial M = \{[x,y];\ y=x^2,\ x\in\langle -2,2\rangle\} \cup \{[x,y];\ y=4,\ x\in\langle -2,2\rangle\}$$

(i) v M° – jediný „podezřelý" bod $(0,1)$, zde je (viz příklad 3) glob. minimum v R^2, tedy i v M.

(ii) na hranici:

$y=4$: $f(x,4) = x^2+8$, $x \in \langle -2,2\rangle$.

„podezřelé body": $[-2,4]$, $[2,4]$, $[0,4]$

(vyšetření extrému fce jedné proměnné

$y = x^2$: $\quad f(x, x^2) = x^4 - x^2$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$:
nové, podezřelý bod $(0,0)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{2}\right)$
(nulové body derivace $g'(x) = (f(x, x^2))' = 2x(2x^2 - 1)$)

Z hodnot v „podezřelých" bodech tedy vidíme:
<u>globální maximum fce na M je v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$,</u>
<u>$f(-2,4) = f(2,4) = 12$.</u>

Poznámka: Kdyby bylo úkolem najít globální extrémy dané funkce na hranici ∂M, pak by zde takové extrémy existovaly (∂M je opět kompaktní množina),
a maximum by bylo opět v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$ a glob. minimum na ∂M by bylo v bodech $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{2}\right)$ $\left(=-\frac{1}{4}\right)$

(5) (Opět snadný příklad) – uvádíme zde jako vzor „návodu"
Vyšetřete globální extrémy fce $f(x,y) = 2xy$ na množině $M = \{[x,y];\ x^2 + y^2 \le 4\}$

1. M je kompaktní množina, neboť M je uzavřená (zřejmé) a omezená (stejně jako v příkladu 4) a f je spojitá na M, tedy f nabývá na M globálních extrémů.

2. <u>lokalizace extrémů na M</u>

(i) <u>vnitřní body</u>: (tj. $\{[x,y];\ x^2 + y^2 < 4\}$
stac. bod je jen $[0,0]$ $\left(\nabla f(x,y) = 2(y, x)\right)$ –
– podezřelý bod, $f(0,0) = 0$

(ii) <u>vyšetření „podezřelých" bodů na kružnici, tj. na $\partial M = \{ [x,y] ;\ x^2+y^2 = 4 \}$:</u>

hled: parametrizujeme kružnici $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (např.) a vyšetříme extrémy fce jedné proměnné

$g(t) = 8 \sin t . \cos t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$(= 4 \sin 2t)$

podezřelé body: $t=0$, $t=2\pi$ a body, kde $g'(t)=0$, tj. kde $8 \cos 2t = 0$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, což je pro

$t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{4}+\pi$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{4}+\pi$

(tj. pro fci f podezřelé body jsou

$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$)

<u>na kružnici:</u>

maximální hodnota f je v bodech $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ... 4

minimální hodnota — " — $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ... -4 $\Big\} \Rightarrow$

$f(0,0) = 0$

glob. maximum nabývá fce v bodech $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$,
glob. minimum nabývá fce v bodech $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

(což bylo vidět i „vidět" hned při úvodní úvaze)

(iii) <u>Vyšetření chování funkce na kružnici ∂M užitím metody Lagrangeových multiplikátorů.</u>

(opět jako návod (takto), i když výsledek už známe)

označíme-li $G(x,y) = x^2+y^2-4$, pak

$\partial M = \{ [x,y] ;\ G(x,y) = 0 \}$;

je-li navíc $\nabla G(x,y) = 2(x,y) \neq (0,0)$ na ∂M, lze užít nutné podmínky (věta o Lagrangeových multiplikátorech):

Extrémy na ∂M fce f může nastat v těch bodech ∂M, kde má řešení soustava

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla G(x,y) \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$$

tj. zde:

$$\begin{cases} 2y = 2\lambda x \\ 2x = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

tj. hledáme řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} &(1) \quad y = \lambda x \\ &(2) \quad x = \lambda y \\ &(3) \quad x^2+y^2 = 4 \end{aligned}$$

(i) jediné řešení (1) (2) je bod $(0,0)$, ale $(0,0)$ nesplňuje (3),

(ii) je-li $x \neq 0$ nebo $y \neq 0$, je i $\lambda \neq 0$, tedy, pokud (x,y) řeší (1), (2), je $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $\lambda \neq 0$ a dostaneme

$$\lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y}, \quad \text{tj.} \quad x^2 = y^2$$

zd. (3) $\quad 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$, a také tedy $y = \pm\sqrt{2}$

a dostaneme opět podezřelé body $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, (dále viz (ii))

6 (Trochu obtížnější příklad na užití Lagrangeových multiplikátorů – „obtížnější" ne v teorii, ale v technickém provedení)

Vyšetřete globální extrémy fce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ na množině $M = \{[x,y];\ x^4 + y^4 = 1\}$

(Vázané extrémy)

1) M je kompaktní množina (omezená a uzavřená – vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení), f je spojitá na M, <u>tedy f nabývá na M globálních extrémů</u>

2) <u>Nalezení globálních extrémů</u>: – metoda Lagrang. multiplikátorů

$$G(x,y) = x^4+y^4-1, \quad \nabla G(x,y) = 4(x^3,y^3) \neq (0,0) \text{ na } M$$

Hledáme (x,y) (podezřelé body) jako řešení soustavy

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla G(x,y) \\ G(x,y) = 0 \end{array}\right., \text{ tj. } \left.\begin{array}{rl} 2x &= 4\lambda x^3 \\ 4y &= 4\lambda y^3 \\ x^4+y^4 &= 1 \end{array}\right\}$$

tedy:

$$\begin{array}{lrl} (1) & 2x\,(1-\lambda 2x^2) &= 0 \\ (2) & 4y\,(1-\lambda y^2) &= 0 \\ (3) & x^4+y^4 &= 1 \end{array}$$

1) rovnice (1) (2) řeší bod $(0,0)$, ale ten nesplňuje (3)

2) soustavu řeší body $(0,1)$ $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$

3) je-li $x \neq 0$ i $y \neq 0$, pak i $\lambda \neq 0$ a z (1) a (2) máme:

$$x^2 = \frac{1}{2\lambda}, \quad y^2 = \frac{1}{\lambda} \quad \text{a z (3)} \quad \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1, \text{ tj.}$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{4}, \text{ tj. } \underline{\underline{\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}}} \qquad \left(x^2 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ y^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

odtud: podezřelé body: $A_1\left[\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right]$, $A_2\left[\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right]$,
$A_3\left[-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right]$, $A_4\left[-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right]$

Vyčíslíme-li hodnoty v podezřelých bodech z bodu 2) a 3), dostaneme: f má glob. minimum v bodech $(1,0)$ a $(-1,0)$ $(=1)$
a glob. maximum v bodech A_i, $i=1,2,3,4$
$(=\sqrt{5})$

(4) Vyšetřete globální extrémy funkce
$$f(x,y,z) = xy + z^2$$
na množině $M = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 \le 1 \text{ a } x \ge 0\}$

1) M je kompaktní množina (omezená a uzavřená v R^2)
omezenost – zřejmá
uzavřenost: $M = M_1 \cap M_2$, M_1, M_2 uzavřené,
$M_1 = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ a $M_2 = \{[x,y,z];\ x \ge 0\}$
f je spojitá na M, tedy f má na M globální extrémy

2) hledání globálních extrémů:

(i) vnitřek M: $M^\circ = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 < 1 \text{ a } x > 0\}$
"podezřelé" body: $\nabla f(x,y,z) = (y, x, 2z)$
$$\nabla f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \notin M^\circ,$$
tedy f nemá v M° žádný lokální, a tedy ani globální extrém

(ii) hranice M: $\partial M = (\partial M)_1 \cup (\partial M)_2$
$(\partial M)_1 = \{[x,y,z];\ x = 0 \text{ a } y^2+z^2 < 1\}$
zde $f(0,y,z) = z^2$, $y^2+z^2<1$ ($f(0,y,z) = g(y,z)$ – 2 proměnné)
"podezřelé" body z (∂M_1) jsou body $(0,y,0)$, $y^2<1$, tedy $y \in (-1,1)$
$(\nabla g(y,z) = (\nabla f(0,y,z)) = (0, 2z))$

$(\partial M)_2 = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \ge 0\}$
"podezřelé" body – užitím metody Lagrangeových multiplikátorů:
$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$
$\nabla G(x,y,z) = 2(x,y,z) \ne \vec{o}$ na $(\partial M)_2$;
tj. hledáme body $(x,y,z)(\in (\partial M)_2)$ tak, aby: $\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla G(x,y,z) \\ \text{a } G(x,y,z) = 0 \end{cases}$:

Řešíme tedy soustavu (pro $x \geq 0$):

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x && (1)\\ x &= 2\lambda y && (2)\\ 2z &= 2\lambda z && (3)\\ x^2+y^2+z^2 &= 1 && (4) \end{aligned}$$

1) $\lambda \neq 0$ (kdyby $\lambda = 0$, pak z (1),(2),(3) plyne, že $x=y=z=0$, ale $(0,0,0) \notin (\partial M)_2$

2) $\underline{x=0} \Rightarrow y=0 \Rightarrow z = \pm 1$ (z (1),(2),(4))
<u>tedy „podezřelé" body jsou $(0,0,1)$ a $(0,0,-1)$</u>

3) <u>je-li $x>0$</u>, pak i $y \neq 0$ a $2\lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$ (z (1),(2)),
tedy $y^2 = x^2$,
z (3): $(1-\lambda)z = 0$;
buď $z=0$ .. pak z (4) dostaneme „podezřelé" body ($2x^2=1$)
$\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 0\right)$

nebo $z \neq 0$, pak $\lambda = +1$, ale v tomto případě rovnice (1),(2) řeší jen $x=0$ a $y=0$ (zde hledáme ale řešení pro $x>0$)

<u>závěr</u>: Na hranici M jsou podezřelé body (globální extrém na M je na hranici ∂M)

$(0,y,0)$ pro $y \in (-1,1)$,	$f(0,y,0) = 0$
$(0,0,1)$ a $(0,0,-1)$	$f(0,0,1) = f(0,0,-1) = 1$
$\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right)$	$f\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right) = \frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 0\right)$	$f\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 0\right) = -\frac{1}{2}$

Tedy – globální maximum na M fce nabývá
v bodech $(0,0,1)$ a $(0,0,-1)$, $(=1)$
globální minimum v bodě $\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 0\right)$ $\left(= -\frac{1}{2}\right)$

Poznámka:

Podezřelé body z extrému na $(\partial M)_2$ lze také hledat takto:

je-li $x^2+y^2+z^2=1$, $x\geq 0$, pak $z^2=1-x^2-y^2$,

f na $(\partial M)_2$ je pak fcí dvou proměnných (x,y):

vyšetřujeme funkci $h(x,y)= xy+1-x^2-y^2$ na

množině $A=\{[x,y];\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0\}$

(i) vnitřní body A: $(\{[x,y];\ x^2+y^2<1 \text{ a } x>0\}=A^0)$

podezřelé body: $\nabla h(x,y)=(y-2x,\ x-2y)$

$\nabla h(x,y)=\vec{0} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)\notin A^0$

(ii) hranice A:

a) $x=0$, $-1\leq y\leq 1$: $h(0,y)=1-y^2$,

podezřelé body $(0,1)$, $(0,-1)$ a $(0,0)$

$h(0,1)=h(0,-1)=(f(0,1,0)=f(0,-1,0))=0$

$\underline{h(0,0)=1\ (=f(0,0,1)=f(0,0,-1))}$

b) $\underline{x>0 \text{ a } x^2+y^2=1}$, pak užitím Lagrangeových multiplikátorů dostaneme:

$G(x,y)=x^2+y^2-1$, $\nabla G(x,y)=2(x,y)\neq\vec{0}$ (zde)

$$\left.\begin{array}{l}\nabla h=\lambda\nabla G\\ \text{a } G(x,y)=0\\ x>0\end{array}\right\}:\quad \begin{array}{ll} y-2x=2\lambda x & (1)\quad y=2x(1+\lambda)\\ x-2y=2\lambda y & (2)\quad x=2y(1+\lambda)\\ x^2+y^2=1 & (3)\quad x^2+y^2=1\end{array}$$

Buď $\lambda=-1$, pak $x=0=y$, ale pak není splněno (3),

tedy $\lambda\neq -1$, pak opět dostaneme (z (1) a (2)): $x^2=y^2$ a

z (3) podezřelé body $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

dále už snadné.

Také: Zde opět lze převést vyšetření extrémů na kružnici $x^2+y^2=1$, $x>0$ na vyšetření extrémů fce jedné proměnné například parametrizací kružnice nebo vyjádřením $x=\sqrt{1-y^2}$, $y\in\langle -1,1\rangle$

(8) Vyšetřete globální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x + y + z$$

na množině $M = \{ [x,y,z] \in R^3 ;\ x^2+y^2+z^2 = 5 \text{ a } yz = 2 \}$

(vázaný extrém)

1) M je kompaktní – je uzavřená (průnik dvou uzavřených množin) a zřejmě omezená

f je spojitá na M, tedy f na M nabývá globálních extrémů

2) Vyšetření (nalezení) globálních extrémů

opět zde ukážu, jak „funguje" metoda Lagrangeových multiplikátorů, ale mnohdy lze řešit problém jednodušeji:

zde asi: globální maximum bude pro $x>0, y>0, z>0$ a díky $yz = 2$ dostaneme $y = z = \sqrt{2}$, $x = 1$ $2(x^2+y^2+z^2=5)$

tj. bod maxima na M: $(1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\quad (f(1,\sqrt{2},\sqrt{2}) = 1+2\sqrt{2})$

globální minimum pro $x<0, y<0, z<0$

a díky podmínkám $yz = 2$ a $x^2+y^2+z^2 = 5$ dostaneme bod

$(-1,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ – zde bude globální minimum

$f(-1,-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -1-2\sqrt{2}$

Vezmeme-li tento příklad jako „cvičení" na užití Lagrang. multiplikátorů, pak budeme postupovat takto:

(i) M je dáno podmínkami

$G_1(x,y,z) = 0$, kde $G_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-5$

$G_2(x,y,z) = 0$, kde $G_2(x,y,z) = yz-2$

metody (LM) lze užít v bodech, kde matice $\begin{pmatrix} \nabla G_1 \\ \nabla G_2 \end{pmatrix}$ má hodnost 2, tj.:

$$\begin{pmatrix} \nabla G_1(x,y,z) \\ \nabla G_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x, & 2y, & 2z \\ 0, & z, & y \end{pmatrix}$$ má hodnost 2,

neboť tedy $x \neq 0$

neb pro $x=0$ $y^2=z^2$, a vzhledem k $G_2(x,y,z)=0$ (tj. $yz=2$) dostaneme body $(0,\sqrt{2},\sqrt{2}),(0,\sqrt{2},-\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2},\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, ty ale nesplňují podmínku $G_1(x,y,z)=0$ (tj. $x^2+y^2+z^2=5$), tedy, matice $\begin{pmatrix} \nabla G_1 \\ \nabla G_2 \end{pmatrix}$ má maximální hodnost v M.

(ii) Body „podezřelé" z extrému hledáme jako řešení soustavy

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla G_1(x,y,z) + \mu \nabla G_2(x,y,z)$$
$$G_1(x,y,z) = 0$$
$$G_2(x,y,z) = 0,$$

tedy řešíme soustavu:

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x \\ 1 &= 2\lambda y + \mu z \\ 1 &= 2\lambda z + \mu y \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ yz &= 2 \end{aligned}$$

z (1): $x \neq 0$ a $\lambda \neq 0$

z (2) a (3): $2\lambda(y-z) = \mu(y-z)$,

což značí buď $y=z$, a pak z $yz=2$ a $x^2+y^2+z^2=5$ dostaneme

body $(1,\sqrt{2},\sqrt{2}),(-1,-\sqrt{2},-\sqrt{2}),(1,-\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-1,\sqrt{2},\sqrt{2})$,

pro $y \neq z$ nedostaneme žádné řešení soustavy

Tedy: závěr (jako na začátku úvah) (vyjádření hodnot v „podezřelých" bodech)

f má glob. maximum v bodě $(1,\sqrt{2},\sqrt{2})$, $f(1,\sqrt{2},\sqrt{2}) = 1+2\sqrt{2}$

a glob. minimum v bodě $(-1,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $f(-1,-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -1-2\sqrt{2}$